Bac Maths D, Tunisie 2014

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\rightarrow -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-\dfrac{(2+\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{x})^{2}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Justifier que la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le tableau de signe ci-contre pour préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $(\mathcal{T})$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)+\dfrac{3}{4}$		$-$	$\vert$	$+$	

c) Tracer $(\mathcal{T})$ et $\mathcal{C}_f$.

4. Soit λ un réel strictement positif.

On désigne par $\mathcal{A}\lambda$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes du repère et la droite d'équation $x=\lambda$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

b) Montrer que $\mathcal{A}\lambda=\mathrm{e}^{-\lambda}+\ln(1+\mathrm{e}^{-\lambda})+1-\ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\rightarrow +\infty}\mathcal{A}\lambda$.

Exercice 2

En vue de comprendre le phénomène de refroidissement d'un liquide après son ébullition, on relève, durant une heure et toutes les 5 minutes, la température T de ce liquide.
Le tableau ci-dessous donne les résultats recensés pour une tasse de café servie dans un salon dont la température ambiante est de $20^{\circ}C$.

t (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
T (en $^\circ C$)	100	68.5	50	37.8	31	26.5	24	22	21.5	20.9	20.5	20.3	20.2

On pose $\theta = \ln(T-20)$.

Les valeurs de θ ; arrondie à 10^{-2} près, sont données dans le tableau qui suit :

t (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
T (en$^\circ C$)	4.38	3.88	3.40	2.88	2.40	1.87	1.39	0.69	0.41	-0.10	-0.69	-1.2	-1.60

1. a) Construire le nuage de point de la série $(t\ ,\ \theta)$, dans la repère proposé dans l'annexe ci-jointe (Figure 1).

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série $(t\ ,\ \theta)$.

Interpréter le résultat.

2. a) Donner une équation de la droite de régression de θ en t.

(On donnera les coefficients de cette équation arrondis à 10^{-2} près).

b) En déduire que l'expression de T en fonction de t est de la forme $T = 20 + \alpha \mathrm{e}^{\beta t}$, α et β étant deux réels dont on donnera les valeurs respectives arrondies à 10^{-1} près.

c) Estimer la température de cette tasse de café après 90 minutes de sa préparation.

d) La température de cette tasse de café atteindra-t-elle $18^\circ C$?

Expliquer.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$.
On considère la sphère $(\mathcal{S})$ d'équation $x^2+y^2+z^2-8=0$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x+2y+z\pm 6=0$.

1. a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère $(\mathcal{S})$.

b) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère $(\mathcal{S})$ suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2. On donne les points $A(2\ ,\ 0\ ,\ 2)$ et $B(2\ ,\ 2\ ,\ 0)$.

a) Vérifier que A appartient à la sphère $(\mathcal{S})$ et n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$ et que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des points$M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace tels que $MA = MB$.

Montrer que $\mathcal{Q}$ est le plan d'équation $y = z$.

c) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupent suivant la droite Δ dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6-3\alpha \\ y & = & \alpha\ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z & = & \alpha \end{array}\right\}$$

3. Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 4

1. soit les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.

b) En déduire que, pour tout nombres complexe $z\ ,\ (z-z_1)(z-z_2) = z^2 + \mathrm{i}\sqrt{3}z - 2$.

Dans la suite, on muni le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$ et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

2. Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), on a tracé le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $\dfrac{-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à $(\mathcal{C})$.

b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

c) Construire les points M_1 et M_2.

3. Soit K le point d'affixe $-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives z et z^3.

a) Montrer que : $(K$ est le milieu du segment $[MN]$ si et seulement si $z^3+z+2\mathrm{i}\sqrt{3}=0)$.

b) Vérifier que $z^3+z+2\mathrm{i}\sqrt{3}=(z-\mathrm{i}\sqrt{3})(z^2+\mathrm{i}\sqrt{3}z-2)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+2\mathrm{i}\sqrt{3}=0$.

d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectives z_2^3 et z_2^3

$($On rappelle que z_1 et z_2 sont les affixes des points M_1 et $M_2)$.

e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O\ ,\ \vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe a^3

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

L'axe des ordonnés θ n'est pas représentée en vrai grandeur.

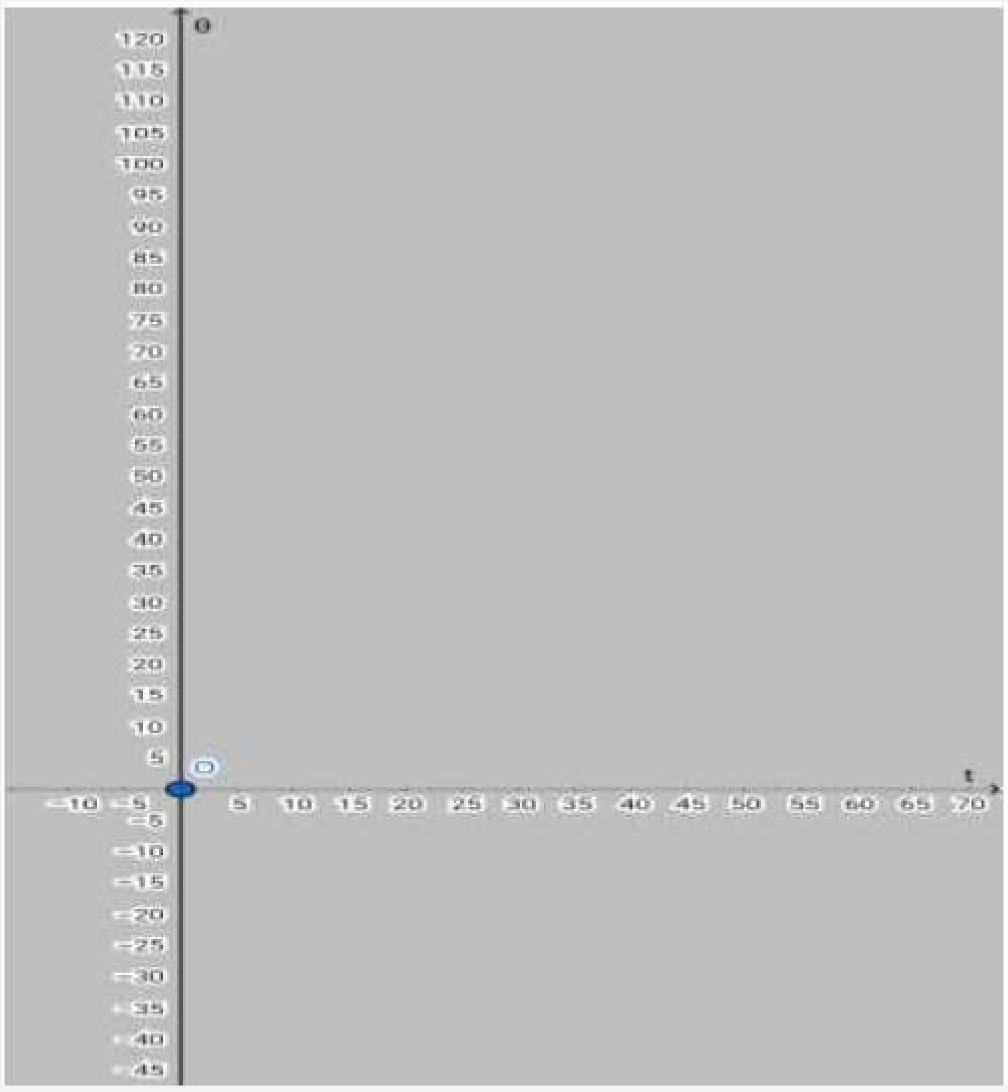
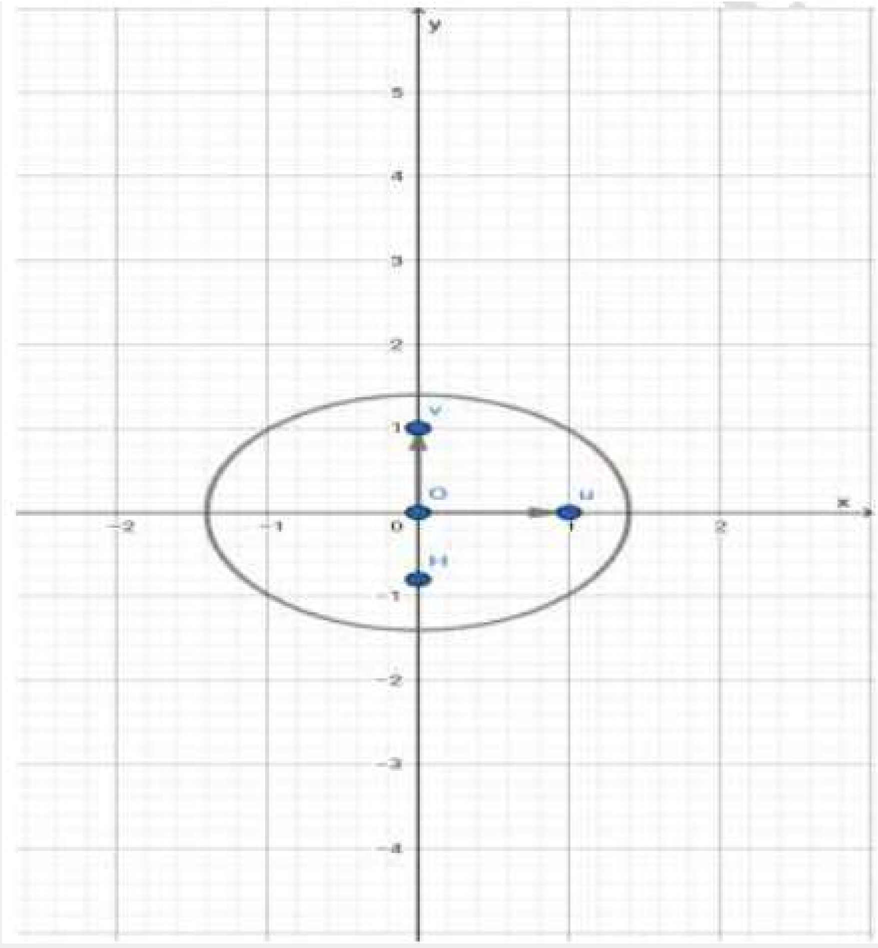


Figure 2


y
x
O
u
v
H
-2
-1
0
1
2
5
4
3
-3
-4