# Bac Maths D, Tunisie 2015

### Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$.
On considère les points $A(1\ ,\ 1\ ,\ 0)$, $B(1\ ,\ -1\ ,\ 2)$, $C(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$ et $D(1\ ,\ 1\ ,\ 4)$.

1. a) Montrer que $A$, $B$ et $C$ déterminent un plan qu'on notera $(\mathcal{P})$.

b) Justifier que $(\mathcal{P})$ est d'équation $x+y+z-2=0$.

c) Vérifier que $D$ n'appartient pas au plan $(\mathcal{P})$.

2. Soit $\mathcal{G}$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$ et $H$ le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle $ABC$ est rectangle en $C$ ?

b) En déduire que $H$ est le centre du cercle $\mathcal{G}$.

c) Soit $\Delta$ la droite perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $H$.

Justifier qu'une représentation paramétrique de $\Delta$ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+\alpha \\ y & = & \alpha \quad ; \quad \alpha\in\mathbb{R} \\ z & = & 1+\alpha \end{array}\right.$$

4. Soit $M$ un point de $\Delta$.

a) Justifier que $MA=MB=MC$.

b) Montrer qu'il existe un unique point $I$ de $\Delta$ tel que $IA=ID$.

Donner ses coordonnées.

c) Déduire de ce qui précède, que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ appartiennent à une même sphère $(\mathcal{S})$ dont on précisera le centre et le rayon.

### Exercice 2

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), $(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $O$ et de rayon $\sqrt{3}$.
1. Soit $A$ l'affixe $a=1+\mathrm{i}\sqrt{2}$

a) Montrer que $A$ appartient à $(\mathcal{C})$.

b) Placer $A$.

2. On considère dans $\mathcal{C}$, l'équation $(E)\ :\ z^2-2\mathrm{i}\sqrt{3}z-6\mathrm{i}\sqrt{2}=0$.

a) Montrer que le discriminant $\Delta$ de l'équation $(E)$ est égale à $12a^2$.

b) En déduire que les solutions de l'équation $(E)$ sont :

$z_1 = \sqrt{3}[-1+\mathrm{i}(1-\sqrt{2})]$ et $z_2 = \sqrt{3}[1+\mathrm{i}(1+\sqrt{2})]$

3. On considère le point $K$ d'affixe $z_k = \mathrm{i}\sqrt{3}$ et on désigne par $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

a) Vérifier que $K$ est le milieu du segment $[M_1M_2]$ .

b) Montrer que $\dfrac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}.$

En déduire que la droite $[M_1M_2]$ est parallèle à la droite $(OA)$.

c) Montrer que $M_1M_2 = 6.$

d) Placer le point $K$ et construire alors les points $M_1M_2$.

## Exercice 3

On appelle capacité vitale chez l'homme, le volume d'aire maximum pouvant être mobilisé par une aspiration forcée suivie d'une expiration forcée.
Le tableau ci-dessous sonne la capacité vitale $C$, exprimée en $cm^3$, chez les hommes âgés de $40$ ans en fonction de leur taille $t$ exprimée en $cm$.

| $t$ (en cm) | 152 | 156 | 160 | 166 | 170 | 174 | 178 | 180 | 182 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ (en $cm^3$) | 3525 | 3620 | 3710 | 3850 | 3945 | 1035 | 4130 | 4175 | 4220 |

1. a) Donner une valeur approchée à $10^{-5}$ près du coefficient de corrélation linéaire entre $t$ et $C$.

b) Justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série $(t\ ;\ C)$.

c) Donner une équation de la droite de régression de $C$ en $t$.

(Les coefficients seront arrondis à $10^{-2}$ près).

d) Déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de $40$ ans et de taille égale à $188\,cm$ ?

2. En fait, la capacité vitale $C$ (exprimée en $cm^3$) chez l'homme dépend de sa taille $t$ (exprimée en $cm$) et de son âge $g$ (exprimé en année).

De nombreuses expériences ont permis d'exprimer $C$ en fonction de $t$ et $g$ selon la relation $C = \alpha t + \beta g + 754$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes (ne dépendant pas de $t$ et $g$).

a) Donner l'expression $C$ pour $g = 40$.

b) En déduire, en utilisant $1.c$, les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.

3. Estimer la capacité vital d'un homme âgé de $50$ ans et mesurant $188\,cm$.

## Exercice 4

Soit la fonction définie sur $I = ]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$
On désigne par $\mathcal{G}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x$.

b) En déduire que la courbe $\mathcal{G}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Étudier la position de $\mathcal{G}$ par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.

2. a) Montrer que, pour tout réel $x$ de $I$, $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que $(x^2-1)$ et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $J = ]0\ ,\ 1[$ et $K = ]1\ \ +\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $J$ et $K$.

d) Montrer que $1$ est l'inique solution de l'équation $f'(x) = 0$.

e) Dresser le tableau de variation de $f$.

3. a) Montrer que la courbe $\mathcal{G}$ admet une unique tangente $D$ parallèle à la droite $\alpha$.

Préciser les coordonnées du point $B$, point de contact de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$.

b) Donner une équation de $\mathcal{D}$.

4. Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), on a tracé relativement au repère $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ la droite $\Delta$ et la courbe $(\Gamma)$ d'équation $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Soit le point $A\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ 0\right)$

Placer le point $A$ et vérifier que $A$ appartient à $\mathcal{D}$.

b) Tracer la droite $\mathcal{D}$ et placer $B$.

c) Tracer la courbe $\mathcal{G}$.

5. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe $\mathcal{G}$, la droite $\alpha$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = \mathrm{e}$.

Calculer $\mathcal{A}$.

Annexe à rendre avec la copie

**Figure 1**

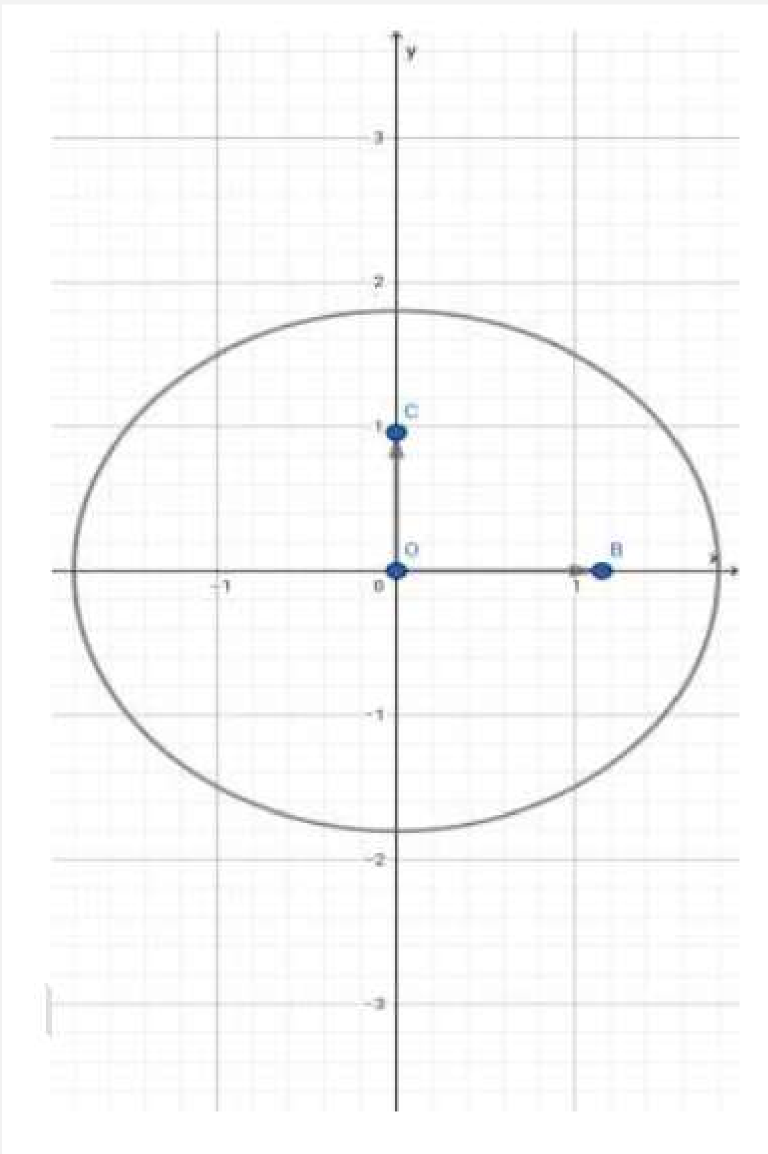
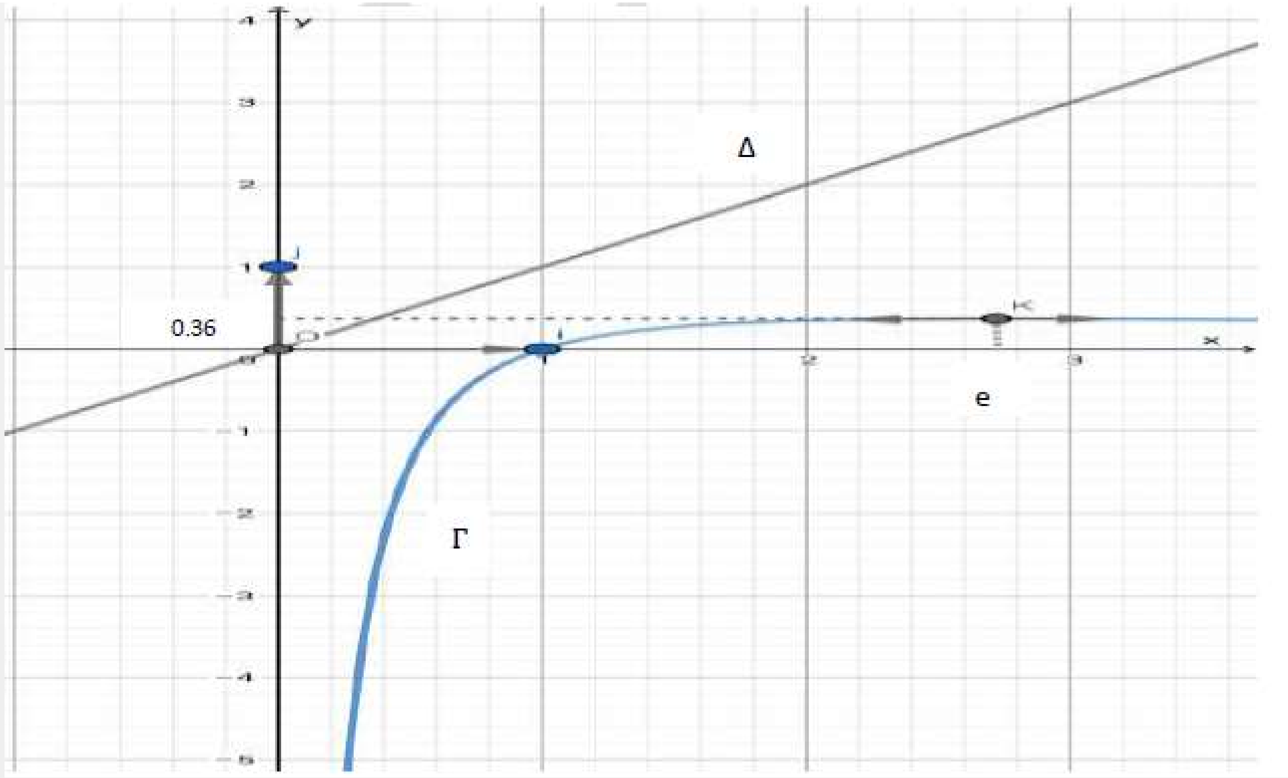



**Figure 2**



0.36
Δ
e
Γ