Bac Maths D, Tunisie 2016

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$.
1. Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont strictement parallèles.

2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace tel que :

$$x^2+y^2+z^2-2x+1=0.$$

a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1\ ,\ 2\ ,\ 1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) Montrer que $\mathcal{P}\cap\mathcal{S}$ est un cercle $\mathcal{G}$ de centre $J(2\ ,\ 3\ ,\ 0)$, dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer $\mathcal{Q}\cap\mathcal{S}$.

3. On donne les points $A(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$, $B(0\ ,\ 1\ ,\ 2)$ et $C(2\ ,\ 2\ ,\ 5)$.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer pour tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$.

4. Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels $ABCM$ est un tétraèdre de volume égal à 2.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $b=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

1. a) Construire dans le repère $(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$, les points A et B.
b) Écrire a et b sous forme algébrique.

2. La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

a) Déterminer l'affixe c du point C.

b) Vérifier que $c^2=1+2\mathrm{i}\sqrt{6}$.

3. On considère le point D d'affixe c^2.

a) Montre que $OD=5$.

b) En déduire une construction du point D.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - 2z - \mathrm{i}\sqrt{6} = 0$.

On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaires sont positives et z_2 l'autre solution.

5. Soit les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2.

a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$.

b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Construire les points M_1 et M_2.

Exercice 3

A. Soit f la fonction définie sur $I =]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x + \dfrac{1}{x}$.
On désigne par $\mathcal{G}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ,\ \mathrm{i}\ ,\ \mathrm{j})$.

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montre que $\mathcal{G}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = -x$.

2. a) Vérifier que pour tout $x \in I\ ,\ f'(x) = -\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Calculer $f(1)$.

En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in I$.

d) Montrer que $I(1\ ,\ 0)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{G})$.

3. a) Tracer la courbe $\mathcal{G}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{G}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

4. Soit $x > 0$.

a) Vérifier que $f\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) En remarquant que $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} > 1$, montrer que $\ln\left(1 \dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_3.

2. a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n \leq 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

d) En déduire que (u_n) est convergente vers un réel t et que $0.7 < t < 1$.

Exercice 4

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissance.

On désigne par $(X\ ;\ Y)$ la série statistique double, où X est le rang de l'année et Y est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

Année	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011	2014
Rangx_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux y_i	37.3	32.3	29.7	24.2	22.1	20.3	18.4	16.4	16.3

1. a) Déterminer, à 10^{-2} près le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

b) Écrire une équation de la droite de régression D de Y en X.

(Les coefficients seront arrondis au centième).

d) Utiliser cet ajustement pour estimer le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissance en 2020.

2. On pose $Z=\ln(Y)$.

Dans la figure ci-contre on a représenté le nuage de point de la série statistique $(X\ ,\ Z)$ et la droite de régression Δ de Z en X dont une équation est $z=-0.11x+3.57$.

a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissance par la relation $y=35.52\mathrm{e}^{-0.11x}$.

b) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le taux de mortalité en Tunisie pour 1000 naissance en 2020.

3. Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite $\mathcal{D}$ définie en $1.$ 1. b), la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $y=35.52\mathrm{e}^{-0.11x}$ et le nuage de point de la série $(X\ ,\ Y)$.

Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptables à la situation ?

Justifier la réponse.